PROCEEDINGS OF IAM, V.6, N.2, 2017, pp.159-172

АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ МАТРИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ф.А. Алиев[1], В.Б. Ларин[2]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2] Институт Механики Академии Наук Украины, Украина
e-mail: f_aliev@yahoo.com, vblarin@gmail.com

Резюме. Рассматривается задача факторизации матричного полинома второго порядка относительно единичной окружности. Показано, что в случае, когда корни детерминанта исходного матричного полинома лежат на единичной окружности, для решения задачи факторизации можно использовать алгоритм, базирующийся на соотношении Басса. На примере показана возможность не единственности решения проблемы факторизации.

Ключевые слова:, Матричный полином, факторизация, соотношение Басса, окружность единичного радиуса, квадратное односторонние матричные уравнение.

AMS Subject Classification: AMS Subject Classification: 15A06, 15A24, 15A69.

1. Введение

Алгоритмы решения различных задач синтеза системы управления стационарными линейными системами включают процедуры факторизации матричных полиномов [2-8,10,11,13,18,20-24]. В этой связи были предложены различные алгоритмы факторизации, в частности, алгоритмы факторизации относительно окружности единичного радиуса [1,9,19,27,28].

Отметим, что факторизация полинома второго порядка [17,26]

$$\varphi(z) = Iz^2 + Nz + L\,, \tag{1}$$

который имеет корни симметрично расположенные относительно окружности единичного радиуса, имеет следующий вид

$$\varphi(z) = (Iz + \theta)(Iz + \theta^{-1})\,, \tag{2}$$

где θ - постоянная матрица, собственные числа которой лежат внутри окружности единичного радиуса

$$\theta = (I + S)^{-1} N\,, \tag{3}$$

а матрица S является положительно определенным решением следующего матричного алгебраического дискретного уравнения Риккати (МАДУР)

$$S = LN'(S^{-1} + I)^{-1} NL' + NN' + LL' - LN'NL' - 2I\ . \tag{4}$$

Здесь и далее I – единичная, N, L - постоянные матрицы, соответствующего размера. В (4) и далее, верхний штрих означает операцию транспонирование. Можно констатировать, что и в настоящее время сохраняют актуальность вопросы разработки алгоритмов факторизации матричных полиномов в более общей постановке (см. [15], где есть дальнейшие ссылки). Так, в [15] рассматривается задача факторизации матричного полинома

$$\varphi(z) = z^{-1}A_{-1} + A_0 + zA_1 \quad (5)$$

относительно окружности единичного радиуса, не делая предположения о симметричном расположении его корней. В (1) A_{-1}, A_0, A_1 – заданные матрицы размера $n \times n$. Показано [15], что полином (5) может быть факторизован, т.е. представлен в виде:

$$\varphi(z) = (I - zR)K(I - z^{-1}G)\,. \quad (6)$$

Матрицы G и R удовлетворяют следующим односторонним квадратным матричным уравнениям:

$$A_1G^2 + A_0G + A_{-1} = 0\,, \quad (7)$$

$$R^2A_{-1} + RA_0 + A_1 = 0\,, \quad (8)$$

Отметим, что согласно [15], факторизация (6) называется канонической, если $\rho(R) < 1,\ \rho(G) < 1$ и называется слабо канонической, если $\rho(R) \le 1,\ \rho(G) \le 1$. Здесь $\rho(\cdot)$ обозначает спектральный радиус.

Сравнивая в (5), (6) коэффициенты при соответствующих степенях z можно получить следующие соотношения:

$$K + RKG = A_0\,,\ -KG = A_{-1}\,,\ -RK = A_1\,. \quad (9)$$

Из этих соотношений следует:

$$K = A_0 + A_1G\,, K = A_0 + RA_{-1}\,, \quad (10)$$

$$A_1G = RA_{-1}\,. \quad (11)$$

Подставив (11) в (7), (8) получим:

$$R(A_1G + A_0) + A_1 = 0\,, \quad (12)$$

$$RA_{-1}G + A_0G + A_{-1} = 0\,, \quad (13)$$

Таким образом, можно, определив путем решения (7), матрицу G, далее найти матрицы K, R из линейных соотношений (10), (12), (13). В случае, если заданы матрицы G, R, K (см. пример)), то для вычисления матричных коэффициентов A_{-1}, A_0, A_1 полинома $\varphi(z)$ можно использовать соотношение (9), т.е. для факторизации полинома (5) имеем следующий алгоритм.

Алгоритм:

1. Формируются матрицы A_{-1}, A_0, A_1 из (5).
2. Решив одностороннее квадратичное уравнение (7), находится G .

3. Матрицы K, R находятся из линейных матричных алгебраических уравнений (10), (12), (13).
4. Подставив матрицы G, R, K в (6) восстанавливается факторизация матричных полиномов.

Отметим, что факторизация (6) называется левой факторизацией полинома (5) (см. [8]). Для нахождения правой факторизации полинома (5) можно поступить следующим образом. Используя соотношение (6), найдем факторизацию полинома

$$\tilde{\varphi}(z) = z^{-1}A'_{-1} + A'_0 + zA'_1 \qquad (14)$$

Представим полином $\tilde{\varphi}(z)$ из (14) в виде (6):

$$\tilde{\varphi}(z) = (I - z\tilde{R})\tilde{K}(I - z^{-1}\tilde{G}) .$$

Приняв во внимание, что $\tilde{\varphi}(z)' = \varphi(z)$, получим следующее соотношение:

$$\varphi(z) = \tilde{\varphi}'(z) = (I - z^{-1}\tilde{G}')\tilde{K}'(I - z\tilde{R}') , \qquad (15)$$

которое определяет правую факторизацию полинома (5) (см. пример).

Отметим, что в [15] много внимания уделяется случаю, когда среди корней полинома $\varphi(z)$ есть лежащие на окружности единичного радиуса. Это обстоятельство может ухудшить сходимость вычислительного процесса нахождения решения уравнений (7), (8). (в случае (1)-(4) МАДУР может не иметь положительно-определенного решения [8] и требуется дополнительное исследование [16]). В этой связи, в [15] рассматриваются процедуры, позволяющие преобразовать исходное уравнение таким образом, что корни, модуль которых равен единице, исключаются.

Ниже показана возможность использования алгоритма [12] для нахождения решения уравнения (7) и, как следствие, решения задачи факторизации полинома (5), в случае наличия корней, модуль которых равен единице (см. пример).

2. Одностороннее квадратное матричное уравнение [12]

Известно, что различные инженерные задачи связаны с теорией колебаний. Здесь следует отметить теорию сильно демпфированных систем [25], в которой центральное место занимают вопросы нахождения корней матричного (или операторного [25]) уравнения

$$A_2X^2 + A_1X + A_0 = 0 . \qquad (16)$$

В [14] матричное уравнение (16) называется односторонним квадратным матричным уравнением (ОКМУ) (Unilateral Quadratic Matrix Equation), очевидно, что оно с точностью до обозначений совпадает с (7).

Перепишем уравнение (16) в следующем виде

$$M_1\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = F_1\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}B , \qquad (17)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = X.$$

Задача состоит в построении процедуры, которая позволит преобразовать (17) к виду

$$M_p \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = F_p \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \Pi(B), \tag{18}$$

где $\Pi(B)$ – некоторый полином от матрицы B. Очевидно, если $\Pi(B) = 0$ (например, $\Pi(B)$ – характеристический полином матрицы B), то соотношение (18) превращается в следующее линейное уравнение относительно X:

$$M_p \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = 0, \tag{19}$$

которое можно переписать в виде

$$M_{p2} X = -M_{p1},$$

если разбить матрицу M_p на блоки: $M_p = \lfloor M_{p1} \;\; M_{p2} \rfloor$. Очевидно, что соотношение (19) определяет решение X, только если матрица M_{p2} является матрицей полного ранга. Другими словами, предлагаемый алгоритм «работает» только в случаях, когда M_{p2} является матрицей полного ранга.

Отметим, что если матрица F_1 обратима, то преобразовав (17) к виду

$$H_f \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} B, \; H_f = F_1^{-1} M_1 \tag{20}$$

можно без труда получить соотношение (19), в котором матрица $M_p = \Pi(H_f)$. Однако, если матрица F_1 сингулярная, предлагаем другой подход.

Не предполагая обратимость матрицы A_2, преобразование (17) к форме (18) начнем с определения матриц M_2, F_2 в соотношении

$$M_2 \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = F_2 \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} B^2. \tag{21}$$

Умножив (17) справа на B получим

$$M_1 \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} B = F_1 \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} B^2. \tag{22}$$

Введем матрицы D_1, L_1, которые удовлетворяют следующему соотношению:

$$L_1 M_1 = D_1 F_1. \tag{23}$$

Умножив слева уравнения (17), (22) на D_1, L_1 соответственно и учитывая (23) получим

$$D_1 M_1 \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = L_1 F_1 \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} B^2, \tag{24}$$

т.е. в качестве фигурирующих в (21) матриц $\mathrm{M}_2, \mathrm{F}_2$, можно принять из (24) следующие матрицы:

$$M_2 = D_1 M_1, \mathrm{F}_2 = \mathrm{L}_1 \mathrm{F}_1. \tag{25}$$

Приняв во внимание, что согласно (19), матрица $\begin{bmatrix} L_1 & D_1 \end{bmatrix}'$ является ядром матрицы $\begin{bmatrix} \mathrm{M}_1 \\ -\mathrm{F}_1 \end{bmatrix}'$, можно находить матрицы L_1, D_1 в (25) используя процедуру null.m пакета MATLAB.

Аналогичная процедура может быть использована и для построения соотношения, в котором фигурируют более высокие степени матрицы B.

Пусть (17) уже преобразовано к виду

$$\mathrm{M}_\mathrm{k} \begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{X} \end{bmatrix} = \mathrm{F}_\mathrm{k} \begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{X} \end{bmatrix} \mathrm{B}^\mathrm{k}. \tag{26}$$

Построим аналогичное соотношение, в котором матрица B имеет степень $\mathrm{k}+1$. Умножим справа (26) на B и введем матрицы D_k, L_k, удовлетворяющие соотношению:

$$L_k M_k = D_k F_1. \tag{27}$$

Имеем,

$$D_k M_1 \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = L_k F_k \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} B^{k+1},$$

$$\text{т.е. } M_{k+1} = D_k M_1, \quad \mathrm{F}_{\mathrm{k}+1} = \mathrm{L}_\mathrm{k} \mathrm{F}_\mathrm{k}.$$

Согласно (27), матрица $\begin{bmatrix} L_k & D_k \end{bmatrix}'$ является ядром матрицы $\begin{bmatrix} \mathrm{M}_\mathrm{k} \\ -\mathrm{F}_1 \end{bmatrix}'$ и поэтому, как уже отмечалось, для нахождения матриц D_k, L_k можно использовать процедуру null.m пакета MATLAB.

Отметим, что $\mathrm{F}_{\mathrm{k}+1} = \mathrm{L}_\mathrm{k} \mathrm{F}_\mathrm{k}$ и, следовательно

$$\mathrm{F}_\mathrm{k} = \mathrm{L}_{\mathrm{k}-1} \ldots \mathrm{L}_1 \mathrm{F}_1. \tag{28}$$

Таким образом, описана процедура, позволяющая строить матрицы M_k, F_k, фигурирующие в (26). Используем ее для определения M_p в (11), полагая, что фигурирующий в (18) полином $\Pi(B)$

$$\Pi(B) = \beta_0 B^m + \beta_1 B^{m-1} + \ldots + \beta_{m-1} B + \beta_m I \tag{29}$$

является характеристическим полиномом матрицы B, в котором $\beta_0 = 1$. Для этого, в качестве первого шага, необходимо в соотношениях (26) сделать одинаковыми матричные коэффициенты при B^k для $k = 1, \ldots, m$. С этой целью, приняв во внимание (28), умножим слева каждое из соотношений (26) на $L_m L_{m-1} \ldots L_k$. Пополним эти соотношения тождеством

$$F_m \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = F_m \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Умножим (30) на β_m, а соотношения, в которых фигурирует B^k на β_{m-k} (коэффициенты β_i определяются (29)). Сложив их, получим:

$$(\beta_m F_m + \beta_{m-1} L_{m-1} \ldots L_1 M_1 + \ldots + \beta_1 L_{m-1} M_{m-1} + M_m) \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = F_m \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \Pi(B) = 0.$$

Следовательно, матрица M_p, фигурирующая в (19) имеет вид:

$$M_p = \beta_m F_m + \beta_{m-1} L_{m-1} \ldots L_1 M_1 + \ldots + \beta_1 L_{m-1} M_{m-1} + M_m. \tag{31}$$

Таким образом, решение уравнения (16) определяется соотношением (19), в котором матрица M_p имеет вид (31). Коэффициенты β_i определяются (29), а матрицы M_1, F_1, соотношением (17).

Остановимся на процедуре определения коэффициентов β_i в (29) (характеристического полинома матрицы B). Так как $B = X$, то, очевидно, что использование стандартных вычислительных процедур, например poly.m пакета MATLAB, для нахождения коэффициентов β_i проблематично. Очевидно, собственные значения матрицы X принадлежат спектру пучка

$$M_1 - \lambda F_1, \tag{32}$$

что позволяет находить коэффициенты β_i путем выбора корней (29) из собственных значений пучка (32) (см. пример).

3. Примеры

Пример 1 (Пример 4.4 [8]). Фигурирующие в (5) матрицы имеют вид:

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = A'_{-1}.$$

Полином (5) необходимо представить в форме (15). Соответствующие матрицы M_1, F_1 в (17) имеют вид

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что эти матрицы не имеют обратных. Задача состоит в нахождении матрицы $\tilde{G}$, определяемой (7), т.е. в нахождении решения уравнения (16), в котором матрицы определяются коэффициентами полинома (14). Для того, чтобы использовать соотношения (19), матрица M_p, в котором определяется (31), необходимо, согласно (25), найти матрицы M_2, F_2. В свою очередь, это требует нахождения матрицы N, которая является ядром матрицы $\begin{bmatrix} M_1 \\ F_1 \end{bmatrix}'$.

Итак, имеем:

$$N = \begin{bmatrix} 0.6492 & -0.0940 & -0.0157 & 0.0157 \\ -0.0494 & 0.9065 & 0.1845 & -0.1845 \\ 0.6971 & 0.1292 & -0.1824 & 0.1824 \\ 0.0480 & 0.2232 & -0.1667 & 0.1667 \\ -0.0480 & -0.2232 & 0.1667 & -0.1667 \\ 0.0480 & 0.2232 & -0.1667 & 0.1667 \\ 0.2040 & -0.0401 & 0.9178 & 0.0822 \\ -0.2040 & 0.0401 & 0.0822 & 0.9178 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.2040 & -0.2040 & -0.4559 & 1.2717 \\ -0.0401 & 0.0401 & -01430 & -0.0940 \\ -0.0822 & 0.0822 & -0.6689 & 0.3401 \\ -0.9178 & 0.9178 & 0.6689 & -4.3401 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.6492 & -0.0494 & 0 & 0.6492 \\ -0.0940 & -0.9065 & 0 & -0.0940 \\ -0.0157 & 0.1845 & 0 & -0.0157 \\ 0.0157 & -0.1845 & 0 & 0.0157 \end{bmatrix}.$$

Фигурирующий в (29) полином $\Pi(B)$ имеет вид $\Pi(B) = B^2$, т.е. $\beta_0 = 1$, остальные коэффициенты β_1, β_2 равны нулю. Поэтому, согласно (31) $M_p = M_2$ и, следовательно, используя (19) получим:

$$\tilde{G} = X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, согласно (10). (12):

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.75 \\ -0.75 & 4.75 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = \tilde{G}'.$$

Разложив матрицу $\tilde{K}'$ на множители Холецкого

$$\tilde{K}' = \dot{C}_k' C_k,$$

получим, согласно (15), следующее выражение для $\varphi(z)$:

$$\phi(z) = \Pi'(z^{-1})\Pi(z),$$

где

$$\Pi(z) = C_k(1 - zR') = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.866 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Это выражение с точностью $\approx 10^{16}$ совпадает с точным значением, приведенным в [8].

Пример 2. Покажем, что полином (5), вообще говоря, может иметь не только одно представление в виде (6). Пусть в (6):

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \; K = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (33)$$

Этим исходным данным, согласно (9), соответствуют следующие матрицы, фигурирующие в (5):

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} -0.17 & 0 \\ -0.05 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.04 \\ 0.04 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.03 & -0.08 \\ 0 & -0.008 \end{bmatrix}, \qquad (34)$$

и, согласно (6), одна из возможных факторизаций полинома (5):

$$\varphi(z) = (I - zR)K(I - z^{-1}G). \qquad (35)$$

В (35) матрицы R, K, G определяются (33).

Используя результаты п.2, построим другую, отличную от (35), факторизацию полинома (5), матрицы в котором определяются (34). При этих исходных данных, матрицы M_1, F_1 в (17) имеют вид:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_{-1} & -A_0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}.$$

В этом примере матрица F_1 имеет обратную. Следовательно, для решения задачи факторизации можно использовать соотношение (20). Матрица $H_f = F_1^{-1} M_1$ имеет следующие собственные значения: $0; -1; 1; 1.25$. Таким образом, в качестве матрицы $\Pi(H_f)$ можно выбрать следующие матрицы:

$$H_1 = H_f^2 + H_f, \quad H_2 = H_f^2 - H_f.$$

Если в (19) выбрать в качестве матрицы M_p матрицу H_1 $(M_p = H_1)$, а в качестве X матрицу G, определяемую (33), то при таком выборе этих матриц будет удовлетворяться соотношение (19).

Если в качестве матрицы M_p взять матрицу H_2, то в результате решения системы (19) получим, что $D_2 = X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ и, соответственно, согласно (10), (12) получим $K_2 = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$.

Найденные значения D_2, K_2, R_2 определяют согласно (6), другую, отличную от (35) факторизацию полинома (5):

$$\varphi(z) = (I - zR_2)K_2(I - z^{-1}D_2).$$

Этот факт связан с тем, что детерминант полинома (5) имеет два корня, модуль которых равен 1.

4. Заключение.

Рассмотрена задача факторизации относительно окружности единичного радиуса матичного полинома второго порядка [15]. Показано, что в случае корней лежащих на окружности единичного радиуса для решения задачи факторизации может быть использован, базирующийся на соотношении Баса, алгоритм [12] решения одностороннего матричного уравнения второго порядка. На примере показана возможность не единственности решения задачи факторизации.

Литература

1. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Discrete generalized algebraic Riccati equations and polynomial matrix factorization, Systems & Control

Letters, V.18, N.1, 1992, pp.49-59.
2. Aliev F.A., Larin V.B. Generalized Lyapunov equation and factorization of polynomial matrices, 12th World Congress IFAC, Sydney, Australia, 5, 1993, pp.157-159.
3. Aliev F.A., Larin V.B. Orthogonal projector and factorization of polynomial matrix, Bulletin of the Technical University of Istanbul, N.46, 1993.
4. Aliev F.A., Larin V.B. J-spectral factorization of polynomial matrices relative to the imaginary axis, Proc of IFAC Symposium on Robust Control Design, 1994, pp.318-322.
5. Aliev F.A., Erguen R. Decompozition of factorization problem of a polynomial matrix with a very small norm, Bulletin of the Technical University of Istanbul, 48, 1995, pp.365-384.
6. Aliev F.A., Larin V.B. Decompozition of factorization problem of a polynomial matrix, Abstracts of ILAS-96, Zhemnitz, Germany, 1996.
7. Aliev F.A., Larin V.B. Algorithm of J-spectral factorization of polynomial matrices. Automatica, V.33, N.12, 1997, pp.2179-2182.
8. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of linear control systems: Analytical methods and computational algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998, 272 p.
9. Aliev F.A., Larin V.B., Kavranoglu D. Factorization of a polynomial matrix with respect to the unit circle, Arabian Journal for Science and Engineering, V.23, N.2, 1998, pp.319-323.
10. Aliev F.A., Larin V.B. Decompozition of factorization problem of a polynomial matrix, Proceed. of Baku State University, phys. and math. series, N.2, 1999.
11. Aliev F.A., Larin V.B., Arcasoy C.C. The construction algorithms for factorization of polynomial and rational matrices. Baku University news, N.1, 2001.
12. Aliev F.A., Larin V.B. Algorithm Based on the Bass Relation for Solving the Unilateral Quadratic Matrix Equation. Appl. Comput. Math., V.12, N.1, 2013, pp.3–7.
13. Aliev F.A., Velieva N.I., Agamalieva L.F. Algorithms for factorization of the irregular matrix polynomials using symbolic computations. TWMS J. Pure Appl. Math., V.4, N.1, 2013, pp.103-109.
14. Bini D.A., Meini B., Poloni F. Transforming Algebraic Riccati Equations into Unilateral Quadratic Matrix Equations, Numer. Math., 116, 2010, pp.553–578.
15. Bini D.A., Latouche G., Meini B. Shift techniques for quasi-birth and death processes: canonical factorizations and matrix equations, Appl. Numer. Math., 116, 2017, pp.24–36.
16. Lancaster P., Rodman L. Algebraic Riccati equation. Clarendon Press. 1995.

17. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.И. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления. Киев, Науковао Думка, 1978, 372 с.
18. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Шабанов М.Б. Частотные методы синтеза оптимальных регуляторов. Инс-т физики АН Аз. ССР, препринт, 89 с.
19. Алиев Ф.А. Факторизация полиномиальных матриц относительно мнимой оси и единичной окружности. Автоматика, N.4, 1989, с.51-58.
20. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. Алгоритм факторизации полиномиальных матриц. Доклады Академии Наук СССР, V.307, N.4-6, 1989, с.781-784.
21. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Факторизация полиномиальных матриц и сепарация дробно-рациональных матриц, Изв. АН СССР, Техн. Кибернетика, N.2, 1990, 11 с.
22. Алиев Ф.А. Факторизация полиномиальных матриц и сепарация дробно-рациональных матриц, 6-е Всесоюзное совещание «Управление многосвязными системами», Суздаль, 1990, 2 с.
23. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. H_2-оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов, Баку, Элм, 1991, 326 с.
24. Алиев Ф.А., Велиева Н.И., Агамалиева Л.Ф. Алгоритм факторизации матричного полинома и сепарации дробно-рациональных выражений возникающих при решении задач оптимального синтеза. Совместный выпуск: «Вестник Восточно-Казахстанского Гос. Технического Университета» и «Вычислительные Технологии» Института Вычислительных технологий Сибирского отделения РАН, Вычислительная математика, 2013, с.102-110.
25. Крейн М.Г. Введение в геометрию индефинитных J - пространств и теорию операторов в этих пространствах, Вторая летняя математическая школа. Вып. I., 1965, с.15–92.
26. Ларин В.Б., Алиев Ф.А. О решении алгебраических уравнений Риккати. В сб. «Дискретные системы управления», 1973, с.15-39.
27. Ларин В.Б. Алгоритм факторизации матричного полинома относительно окружности единичного радиуса, Автоматика, N. 1, 1993, с.3–8.
28. Ларин В.Б. Алгоритмы факторизации матричного полинома относительно окружности единичного радиуса, Автоматика, N.3, с.3-9.

Algorithm of factorization of second degree discrete matrix polynomials

F.A. Aliev[1], V.B. Larin[2]

[1] Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2] Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine
e-mail: f_aliev@yahoo.com, vblarin@gmail.com

ABSTRACT

The problem of factorization the second order matrix polynomial with respect to the unit circle is considered. It is shown, that in the case when the roots laying on the unit circle for solution the problem of factorization can be used algorithm, basing on the Bass relation. On the example the opportunity of non uniqueness of the solution of a problem of factorization is shown.
Keywords: Matrix polynomial, factorization, Bass relation, circle of unit radius, square matrix equation, one-sided matrix equation.

References

1. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Discrete generalized algebraic Riccati equations and polynomial matrix factorization, Systems & Control Letters, V.18, N.1, 1992, pp.49-59.
2. Aliev F.A., Larin V.B. Generalized Lyapunov equation and factorization of polynomial matrices, 12th World Congress IFAC, Sydney, Australia, 5, 1993, pp.157-159.
3. Aliev F.A., Larin V.B. Orthogonal projector and factorization of polynomial matrix, Bulletin of the Technical University of Istanbul, N.46, 1993.
4. Aliev F.A., Larin V.B. J-spectral factorization of polynomial matrices relative to the imaginary axis, Proc of IFAC Symposium on Robust Control Design, 1994, pp.318-322.
5. Aliev F.A., Erguen R. Decompozition of factorization problem of a polynomial matrix with a very small norm, Bulletin of the Technical University of Istanbul, 48, 1995, pp.365-384.
6. Aliev F.A., Larin V.B. Decompozition of factorization problem of a polynomial matrix, Abstracts of ILAS-96, Zhemnitz, Germany, 1996.
7. Aliev F.A., Larin V.B. Algorithm of J-spectral factorization of polynomial matrices. Automatica, V.33, N.12, 1997, pp.2179-2182.
8. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of linear control systems: Analytical methods and computational algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998, 272 p.
9. Aliev F.A., Larin V.B., Kavranoglu D. Factorization of a polynomial matrix with respect to the unit circle, Arabian Journal for Science and

Engineering, V.23, N.2, 1998, pp.319-323.
10. Aliev F.A., Larin V.B. Decompozition of factorization problem of a polynomial matrix, Proceed. of Baku State University, phys. and math. series, N.2, 1999.
11. Aliev F.A., Larin V.B., Arcasoy C.C. The construction algorithms for factorization of polynomial and rational matrices. Baku University news, N.1, 2001.
12. Aliev F.A., Larin V.B. Algorithm Based on the Bass Relation for Solving the Unilateral Quadratic Matrix Equation. Appl. Comput. Math., V.12, N.1, 2013, pp.3–7.
13. Aliev F.A., Velieva N.I., Agamalieva L.F. Algorithms for factorization of the irregular matrix polynomials using symbolic computations. TWMS J. Pure Appl. Math., V.4, N.1, 2013, pp.103-109.
14. Bini D.A., Meini B., Poloni F. Transforming Algebraic Riccati Equations into Unilateral Quadratic Matrix Equations, Numer. Math., 116, 2010, pp.553–578.
15. Bini D.A., Latouche G., Meini B. Shift techniques for quasi-birth and death processes: canonical factorizations and matrix equations, Appl. Numer. Math., 116, 2017, pp.24–36.
16. Lancaster P., Rodman L. Algebraic Riccati equation. Clarendon Press. 1995.
17. Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Sunsev V.I. Optimizasiya lineynikh invariantnikh vo vremeni sistem upravleniya, Kiyev, Naukovao Dumka, 1978, 372 s. (Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Sunsev V.I. Optimization of linear time-invariant control systems, Kyiv, Naukovao Dumka, 1978, 372 p.) (in Russian).
18. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B., Shabanov M.B. Chastotniyr metodi sinteza optimalnikh regulyatorov, Ins-t fiziki An Az. SSR, preprint 89.1. (Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B., Shabanov M.B. Frequency methods for synthesis of optimal regulators, Institute of Physics, AS Az. SSR, preprint 89.1.) (in Russian).
19. Aliev F.A. Faktorizasiya polinomialnikh matris otnositelno mnimoy osi I yedinichnoy okrujnosti, Avtomatika, N.4, 1989, s.51-58 (Aliev F.A. Factorization of polynomial matrices with respect to the imaginary axis and the unit circle, Automation, N.4, 1989, pp.51-58) (in Russian).
20. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Algoritm faktorizasii polinomialnikh matris, Dokladi Akademii Nauk SSSR, V.307, N.4-6, 1989, s.781-784 (Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Algorithm for factorization of polynomial matrices, Reports of the Academy of Sciences of the USSR, V.307, N.4-6, 1989, pp.781-784) (in Russian).
21. Aliev F.A., Larin V.B. Faktorizasiya polinomialnikh matris i seperasiya srobno-rasionalnikh matris, izv. AN SSSR, Tekhn. Kibernetika, N.2, 1990, 11 s. (Aliev F.A., Larin V.B. Factorization of polynomial matrices and

separation of fractional-rational matrices, Izv. AN SSSR, Tech. Cybernetics, N.2, 1990, 11 p.) (in Russian).

22. Aliev F.A. Faktorizasiya polinomialnikh matris I separasiya drobno-rasionalnikh matris, 6-ye Vsecoyuznoye soveshaniye “Upravleniye mnogosvyaznimi sistemami”, Suzdal, 1990, 2 p. (Aliev F.A. Factorization of polynomial matrices and separation of fractional-rational matrices, 6th All-Union Conference “Managing Multiconnected Systems”, Suzdal, 1990, 2 p.) (in Russian).
23. Aliev F.A., Bordyug B.A. H_2 optimizasii I metod prostranstva sostoyaniy v zadache sinteza optimalnikh regulyatorov, Baku, Elm, 1991, 326 s. (Aliev F.A., Bordyug B.A. H_2-optimization and the space-state method in the problem of synthesis of optimal regulators, Baku, Elm, 1991, 326 p.) (in Russian).
24. Aliev F.A., Veliyeva N.I., Agamaliyeva L.F. Algoritm faktorizasii matrichnogo polinoma i seperasii drobno-rasionalnikh virajeniy voznikayushikh pri reshenii zadach optimalnogo sinteza, Sovmestniy vipusk: “Vestnik Vostochno-kazakhstannogo Gos. Tekhnicheskogo Universiteta” I “Vichislitelniye Tekhnologii” Instituta Vichislitelnikh tekhnologiy Sibirskogo otdeleniya RAN, Vichislitelnaya matematika, 2013, s.102-110 (Aliev F.A., Veliyeva N.I., Agamaliyeva L.F. An algorithm for factorizing a matrix polynomial and separating fractional-rational expressions that arise when solving optimal synthesis problems, Applied mathematics, 2013, pp.102-110) (in Russian).
25. Kreyn M.G. Vvedeniye v geometriyu indefinitnikh J- prostranstv I teoriyu operatorov v etikh prostranstvakh, Vtoraya letnyaya matematicheskaya shoka, N.2, 1965, s.15-92 (Kreyn M.G. Introduction to the geometry of indefinite I-spaces and the theory of operators in these spaces, The Second Summer Mathematical School, N.2, 1965, pp.15-92) (in Russian).
26. Larin V.B., Aliev F.A. O reshenii algebraicheskikh uravneniy Rikkati, V sb. “Diskretniye sistemi upravleniya”, 1973, s.15-39 (Larin V.B., Aliev F.A. On the solution of the algebraic Riccati equations, Discrete Control Systems, 1973, pp.15-39) (in Russian).
27. Larin V.B. Algoritm faktorizasii matrichnogo polinoma otnositelno okrujnosti yedinichnogo radiusa, Avtomatika, N.1, 1993, s.3-8 (Larin V.B. Algorithm for factorization of a matrix polynomial with respect to a circle of unit radius, Automation, N.3, 1993, pp.3-9) (in Russian).
28. Larin V.B. Algoritmi faktorizasii matrichnogo polinoma otnosinelno okrujnosti yedinichnogo radiusa, Avtomatika, N.3, 1993, s.3-9 (Larin V.B. Algorithms of factorization of a matrix polynomial with respect to a circle of unit radius, Automation, N.3, 1993, pp.3-9) (in Russian).